ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x\in R$ **Μονάδες 7**

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$.

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f , g ισχύει ότι

$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x)+f(x)\, g'(x)$ (μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4,\}$ και τα ενδεχόμενα

$A = \{\omega_1, \omega_4$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

• $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

• Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x , όταν $x=1$,

όπου $f(x) = \frac{x}{3}\ln x,\ x>0$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του A.

Μονάδες 7

Β3. Αν $P(A')=\frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$

και $P(A'-B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του B.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4=85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta=75$
  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c=10$

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι $f_1=0{,}1$, $f_2=0{,}3$, $f_3=0{,}2$ και $f_4=0{,}4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$.

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ < ν, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\left(1, f(1)\right)$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε, με $E < 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $x_1, x_2, \ldots x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, \ldots x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in R$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$, $f(e)$, $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x) = x\ln x + 2$

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$\Omega = \{t_n,\ n = 1,2,3,\ldots,30 :\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \ldots < t_{30} = 1\}$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

Α={ $t \in \Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$\big(t,f(t)\big)$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία },

$B = \{ t \in \Omega$: $f(t) > f'(t)+1\}$,

όπου $f(t) = t\ln t + 2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη Σχολ. Βιβλίο σελ. 28

Α2. Θεωρία Σχολ. Βιβλίο σελ. 14

Α3. Θεωρία Σχολ. Βιβλίο σελ. 87

Α4. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα $P(\omega_1)=-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$. Για $x>0$ $f'(x)=\left(\dfrac{x\ln x}{3}\right)'=\dfrac{\ln x+1}{3}$.

Άρα $f'(1)=\dfrac{1}{3}$. Δηλαδή $P(\omega_3)=\dfrac{1}{3}$.

Β2. Αν $A=\{\omega_1,\omega_4\}$ τότε $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$. Άρα $P(A')=P(\omega_2)+P(\omega_3)\Leftrightarrow P(A')=P(\omega_2)+\dfrac{1}{3}$

(1). Παρατηρούμε ότι : $P(\omega_2)\ge 0 \Leftrightarrow P(\omega_2)+\dfrac{1}{3}\ge\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow P(A')\ge\dfrac{1}{3}$. Επειδή

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)\le 1$ άρα $\dfrac{1}{4}+P(\omega_2)+P(\omega_3)\le 1$ $P(A')\le\dfrac{3}{4}$. Δηλαδή $\dfrac{1}{3}\le P(A')\le\dfrac{3}{4}$.

Β3. Αφού $P(A')=\dfrac{3}{4}$ από τη σχέση (1) έχουμε $P(\omega_2)=\dfrac{5}{12}$. Γνωρίζουμε ότι :

$P(A)=1-P(A')\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{1}{4}$. Άρα $P(\omega_1)+P(\omega_4)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow P(\omega_4)=0$.

Παρατηρούμε ότι : $P\big[(A-B)\cup(B-A)\big]=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(\omega_4)+P(\omega_3)=\dfrac{1}{3}$.

Επειδή $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$ τότε $A'-B'=\{\omega_3\}$. Άρα $P(A'-B')=P(\omega_3)=\dfrac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η μικρότερη παρατήρηση είναι το 50 οι κλάσεις έχουν την μορφή: [50-50+C), [50+2c,50+3c), [50+3c, 50+4c)

Επειδή $x_4 = 85$ τότε $85 = \dfrac{50+50+3c+4c}{2} \Leftrightarrow 170 = 100 + 7c \Leftrightarrow c = 10$.

Γ2. Γνωρίζουμε ότι: $f_4 = 2f_3$ **(1)**

Επειδή δ=75 τότε το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 75. Λόγω ομοιόμορφης κατανομής των παρατηρήσεων $\dfrac{f_3}{2} + f_4 = 0,5$. Από την **(1)**

$\dfrac{f_3}{2} + 2f_3 = 0,5 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$.

Από την **(1)** $f_4 = 0,4$.

Γνωρίζουμε ότι: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \;\Rightarrow\; f_1 + f_2 = 0,4$ άρα $f_1 = 0,4 - f_2$ **(2)**

$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 1 \;\Rightarrow\; 74 = 55(0,4 - f_2) + 65f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4$

$74 = 22 - 55f_2 + 65f_2 + 15 + 34 \Rightarrow$

$74 - 22 - 15 - 34 = 10f_2 \;\Leftrightarrow\; 3 = 10f_2 \;\Leftrightarrow\; f_2 = 0,3$.

Από την **(2)** $f_1 = 0,1$.

Άρα ο πίνακας είναι:

Κλάσεις	x_i	f_i
[50 - 60)	55	0,1
[60 - 70)	65	0,3
[70 - 80)	75	0,2
[80 - 90)	85	0,4
Σύνολο		1,0

Γ3. Στην Κλάση [50 - 60) το 10% μετατρέπεται σε $10\dfrac{100}{60} = \dfrac{100}{6}\%$

[60 - 70) το 30% μετατρέπεται σε $30\dfrac{300}{60} = \dfrac{300}{6}\%$

[70 - 80) το 20% μετατρέπεται σε $20\dfrac{200}{60} = \dfrac{200}{6}\%$

Άρα $x' = 55 \cdot \dfrac{100}{6} + 65 \cdot \dfrac{300}{6} + 75\dfrac{200}{6} = \dfrac{55+195+150}{6} = \dfrac{400}{6} = \dfrac{200}{3}$.

Γ4. Αφού το 2,5% είναι τουλάχιστον 74 τότε $\bar{x} + 25 = 74$ **(1)**

το 16% είναι το πολύ 68 τότε $\bar{x} - 5 = 68$ **(2)**

Άρα την λύση των **(1)** και **(2)** προκύπτει: $3s = 6 \;\Leftrightarrow\; s = 2$

Άρα $\bar{x} = 70$. $CV = \dfrac{5}{x} = \dfrac{2}{70} < 10\%$ άρα ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι :

Για $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$ με $f'(1) = 1$ και $f(1) = \kappa$. Άρα $y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow y = x + \kappa - 1$ (ε)
Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1-\kappa, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \kappa-1)$. Το εμβαδόν τον τριγώνου ΑΟΒ είναι $(AOB) = E = \dfrac{|(\kappa-1)(1-\kappa)|}{2} = \dfrac{(\kappa-1)^2}{2}$, $\kappa > 1$.

Επειδή $E < 2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2 < 4 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$. Επειδή $\kappa > 1$ δεκτές τιμές : $1 < \kappa < 3$. Τέλος επειδή κ ακέραιος, δεκτή τιμή η κ = 2.

Δ2. α. Η εξίσωση εφαπτομένης γράφεται : $y = x + 1$. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου $\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$.

β. Η νέα μέση τιμή $\bar{x}_{Νεα} = \dfrac{\sum_{\iota=1}^{50} t_i + 20 \cdot 3 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 1550 = 50 \cdot \bar{x} + 60 - 15\lambda$

$\Leftrightarrow -10 = -15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$.

Δ3. Για $x > 0$ $f'(x) = \ln x + 1$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$. Επειδή για $0 < x < \dfrac{1}{e}$ έχουμε $f'(x) < 0$ και για $x > \dfrac{1}{e}$ έχουμε $f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα για $x \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$. Για $x_o = \dfrac{1}{e}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με τιμή $f(\frac{1}{e}) = 2 - \frac{1}{e} > 0$. Επίσης $f(e) = e + 2$ και $f'(\frac{1}{e}) = 0$. Η μέση τιμή των $f(a), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'(\frac{1}{e})$ είναι : $\bar{x} = \dfrac{a\ln a + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 + e + 2}{5}$

$= \dfrac{\ln a^a + \ln\beta^\beta + \ln\gamma^\gamma + 8 + e}{5} = \dfrac{\ln(a^a\beta^\beta\gamma^\gamma) + 8 + e}{5} = \dfrac{\ln(e^7) + 8 + e}{5} = \dfrac{15 + e}{5}$.

Επειδή η f για $x > \dfrac{1}{e}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε f(α)<f(β)<f(γ)<f(e). Επίσης η ελάχιστη τιμή της f είναι η $f(\frac{1}{e}) = 2 - \frac{1}{e}$. Άρα $f(x) \geq f(\frac{1}{e})$. Συνεπώς $f(a) \geq 2 - \frac{1}{e} > 0 = f'(\frac{1}{e})$.

Άρα $R = t_{max} - t_{min} = f(e) - f'(\frac{1}{e}) = e + 2$.

Δ4. Για το ενδεχόμενο Α πρέπει $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{e}$. Άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, \ldots\ldots, t_{30}\}$.

Για το ενδεχόμενο Β έχουμε : $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t(t-1) > 0$. Επειδή $t - 1 < 0$ για τα t_i με $i = 1, 2, 3, \ldots 29$ τότε και lnt < 0 άρα t < 1. Συνεπώς $B = \{t_1, t_2, \ldots\ldots, t_{29}\}$.

α. $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$.

β. $A\cap B=\{t_{11},t_{12},......,t_{29}\}$. $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{19}{20}$

ΚΡΙΤΙΚΗ

Τα θέματα στα Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής ήταν πολλά και δύσκολα. Κάλυπταν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης. Ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας παρότι υπήρχαν δύσκολα υποερωτήματα και στο **ΘΕΜΑ Β** (**Β2.**) και στο **ΘΕΜΑ Γ** (**Γ3.**).

Το 4^{o} θέμα ήταν σύνθετο με πολλά ζητούμενα απαιτούσε συνδυαστική σκέψη και γνώση ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης από την Β΄ Λυκείου.

Επιμέλεια
ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΣΠΥΡΟΥ – ΓΙΩΡΓΟΣ Σ. ΓΑΛΑΡΗΣ